

Lokalhauxere Vektorräume

Def. 0.1: a) Ein topologischer Vektorraum (TVR) ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), der ein topologischer Hausdorff-Raum ist, so dass die Abb.

$$X \times X \rightarrow X \quad (x, y) \mapsto x + y$$

$$\mathbb{R} \times X \rightarrow X \quad (t, x) \mapsto tx$$

stetig sind.

b) Eine Halbnorm auf einem Vektorraum X ist eine Abbildung $p: X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, so dass

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$$

$$p(tx) = |t| p(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}, x \in X$$

c) Eine Familie von Halbnormen $\{p_j\}_{j \in J}$ trennt die Punkte von X , falls

$$p_j(x) = 0 \quad \forall j \in J \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{gilt.}$$

* (andere Konzept als Fam. von Abbildungen, die die Punkte trennt? Dann würde $p_j(x) = p_j(y) \quad \forall j \in J \Leftrightarrow x = y$ gelten)

Satz 0.2: Sei X ein Vektorraum und $(p_j)_{j \in J}$ eine Familie von Halbnormen, die die Punkte von X trennt. Dann definiert

$$\mathcal{B}_0 := \left\{ \bigcap_{i=1}^n V(p_{j_i}, \varepsilon_i) : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0, j_1, \dots, j_n \in J \right\}$$

eine Basis von Nullumgebungen und

von $\mathcal{Q}$ nach. ... Dann erfüllt $\mathcal{Q}$?

die Basis einer Vektorraumtopologie auf X .

Bew.: Rudin, Theorem I. 1.37.

Def. 0.3: a) Ein lokal-konvexer TVR ist ein TVR, dessen Topologie wie im vorigen Satz durch eine Familie $(p_i)_{i \in I}$ von ^{punkttrennenden} Halbnormen beschrieben werden kann.

b) Ein lokal-konvexer TVR X heißt Fréchet-Raum, falls seine Topologie durch eine abzählbare Fam. von punkttrennenden Halbnormen $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschrieben werden kann und X bezgl. der Metrik

$$d(x, y) := \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$$

ein vollständiger metrischer Raum ist.

Lemma 0.4: Ein Fréchet-Raum, dessen Topologie durch eine endliche Fam. $(p_1, \dots, p_n)$ beschrieben werden kann ist ein Banachraum.

Bew.: Übung!

Def. 0.5: Für einen TVR X heißt $X' := \{ f: X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ linear und stetig} \}$ Dualraum zu X .

Theorem 0.6 (Satz von Hahn-Banach): Für einen lokal-konv. TVR X trennt X' die Punkte, also

$$f(x) = f(y) \quad \forall f \in X' \Leftrightarrow x = y.$$

Dualraum zu X .

Differentialrechnung in topologischen Vektorräumen (TVR) (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

Def. 1.1: Seien X, Y topologische Vektorräume, sei $U \subseteq X$ offen und $f: U \rightarrow Y$ eine Abbildung.
a) für $x \in X$ ist dann

$$df(x)(v) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x+hv) - f(x))$$

die Richtungsableitung von f an der Stelle x in Richtung v , falls das Limit existiert. f heißt differenzierbar falls $df(x)(v)$ für alle $(x,v) \in U \times X$ existiert und stetig differenzierbar, wenn darüberhinaus die Abbildung

$$df: U \times X \rightarrow Y \quad (x,v) \mapsto df(x)(v)$$

stetig ist (bzgl. der Produkttopologie, "jointly continuous").

b) Die Abbildung f heißt C^1 -Abbildung, falls f stetig differenzierbar ist. f heißt C^n -Abbildung, falls $f \in C^1$ ist und $df \in C^{n-1}$. f heißt C^∞ -Abbildung oder glatt, falls $f \in C^n$ ist für alle $n \geq 1$.

c) Falls X und Y topologische Vektorräume über $\mathbb{C}$ sind, dann heißt f holomorph falls $f \in C^1$ ist und $df(x): X \rightarrow Y$ komplex linear ist (reell linear ist $df(x)$ immer, S.u.).

d) Falls $f \in C^n$ -Abb. ist, so sind die höheren Ableitungen induktiv definiert: $d^0 f = df$ und $d^k f(x): X \rightarrow Y$ komplex linear ist (reell linear ist $d^{k-1} f(x)$).

in lokal konvexen Räumen

Bem. 1.2: Vergleiche zu anderen Definitionen von Differenzierbarkeit* werden wir erst später sehen. Es wird sich dann zeigen, dass diese Definition die wichtigsten anderen Definitionen verallgemeinert.

Bsp. 1.3: Sei $L: X \rightarrow Y$ stetig und linear, dann ist

$$dL(x)(v) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (L(x+hv) - L(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} L(v) = L(v)$$

und somit ist L eine C^1 und des weiteren auch eine glatte Abbildung. Sind X und Y komplex und L ist komplex linear, so ist L holomorph.

Def. 1.4: (Integral in lokal konvexen Räumen): Sei X ein lokal konvexer TVR, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\gamma: I \rightarrow X$ stetig und $a, b \in I$. Falls dann ein $v \in X$ existiert, so dass

$$\lambda(v) = \int_a^b \lambda(\gamma(s)) ds \quad \forall \lambda \in X'$$

(Schwache)

gilt, so heißt v das Integral von γ (von a nach b) und wir setzen

Lemma 1.5: (Schwache) Integrale sind eindeutig. $\int_a^b \gamma(s) ds = v$.

Bew: Falls $v = \int_a^b \gamma = v'$, so gilt

$$\lambda(v) = \int_a^b \lambda(\gamma(s)) ds = \lambda(v') \Rightarrow \lambda(v-v') = 0 \quad \forall \lambda \in X'$$

$\Rightarrow v-v'=0$ nach dem Satz von Hahn-Banach. $\square$

Lemma 1.6: Ist $f: U \subseteq X \rightarrow Y$ C^1 -Abb. und $L: Y \rightarrow Z$ stetig und linear, so ist $L \circ f$ C^1 -Abb. mit

$$d(L \circ f)(x) = \lambda \Rightarrow \lambda(L(f(x))) = \lambda(v') \Rightarrow \lambda(v-v') = 0 \quad \forall \lambda \in X'$$

(Hauptsatz, schwache Version)

Lemma 1.6: Ist X lokal konvex, $I \subseteq \mathbb{R}$ ^(Intervall) offen und $\gamma: I \rightarrow X$ eine C^1 -Abb., dann existiert $\int_0^t \gamma'(s) ds$ für alle $s \in I$ und es gilt

$$\gamma(t) = \gamma(0) + \int_0^t \gamma'(s) ds$$

Bew.: Für $t \in I$ und $\lambda \in X'$ haben wir nach Def.

$$\lambda(\gamma(t) - \gamma(0)) = \lambda(\gamma(t)) - \lambda(\gamma(0)) \stackrel{(i)}{=} \int_0^t (\lambda \circ \gamma)'(s) ds \stackrel{(ii)}{=} \int_0^t \lambda(\gamma'(s)) ds.$$

Hier benutzen wir für (i) den gewöhnlichen Hauptsatz der Diff. & Integralrechnung und für (ii) Lemma 1.6.

Also erfüllt $\gamma(t) - \gamma(0)$ die definierende Eigenschaft des schwachen Integrals $\int_0^t \gamma'(s) ds$. ▀

Satz 1.7: Sei $f: U \subseteq X \rightarrow Y$ eine C^1 -Abb.

a) Für jedes $x \in U$ ist $df(x): X \rightarrow Y$ (zell) linear & stetig.

b) Falls $x + v [0,1] \subseteq U$, so ex. $\int_0^1 df(x+tv)(v) dt$ und es gilt

$$f(x+v) = f(x) + \int_0^1 df(x+tv)(v) dt$$

Inbesondere ist f lokal konstant gdw. $df(x) = 0 \forall x \in U$.

c) f ist stetig

d) Ist f C^n -Abb. für $n \geq 2$, so sind die Abb.

$$X^n \rightarrow Y \quad (v_1, \dots, v_n) \mapsto d^n f(x)(v_1, \dots, v_n)$$

für alle $x \in U$ stetig, symmetrisch und n -linear.

e) Ist f C^n -Abb. für $n \geq 2$ so sind die Abb.

Bew.: Wir betrachten für $\lambda \in X'$ und $v_1, v_2 \in X$ die Abb.

$$(t_1, t_2) \mapsto F(t_1, t_2) := \lambda(f(x + t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2))$$

die für (t_1, t_2) aus einer Nullumgebung von $0 \in \mathbb{R}^2$ definiert ist.

Die partiellen Ableitungen von F sind gegeben durch

$$\frac{\partial F}{\partial t_1}(t_1, t_2) := dF(t_1, t_2)(1, 0) = \lambda(df(x + t_1 v_1 + t_2 v_2)(v_1)) \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_2}(t_1, t_2) := dF(t_1, t_2)(0, 1) = \lambda(df(x + t_1 v_1 + t_2 v_2)(v_2)). \quad (\text{nachrechnen!})$$

Insbesondere sind diese stetig, also ist F stetig differenzierbar und somit eine C^1 -Abb. (Analysis I!).

Weiter ist $dF(0, 0): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ linear, und somit gilt

$$d(\lambda \circ f)(x)(v_1 + v_2) := dF(0, 0)(1, 1) = dF(0, 0)(1, 0) + dF(0, 0)(0, 1) = d(\lambda \circ f)(x, v_1) + d(\lambda \circ f)(x, v_2)$$

" (Lemma 1.6)

$$\lambda(df(x)(v_1 + v_2)) = \lambda(df(x)(v_1) + df(x)(v_2)) = \lambda(df(x)(v_1)) + \lambda(df(x)(v_2))$$

$$\Rightarrow \lambda(df(x)(v_1 + v_2)) = \lambda(df(x)(v_1) + df(x)(v_2)) \quad \forall \lambda \in X', v_1, v_2 \in X$$

$$\Rightarrow df(x)(v_1 + v_2) = df(x)(v_1) + df(x)(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in X \quad (\text{Hahn-Banach})$$

Genauso folgt auch $df(x)(t \cdot v) = t \cdot df(x)(v) \quad \forall t \in \mathbb{R}, v \in X$.

Da df nach Definition stetig ist und die Inklusion $U \hookrightarrow U \times X$ stetig ist, ist $df(x)$ stetig.

b) Folgt direkt aus Lemma 1.6 wenn man $\gamma(t) = f(x + t \cdot v)$ setzt.

c) Sei die Topologie auf X durch die FACH. $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von punktierten Halbnormen def. Dann ist zu zeigen, dass

$$\|v\|_i \rightarrow 0 \iff \|df(x)(v)\|_i \rightarrow 0$$

$$\|v\|_i \rightarrow 0 \iff \|df(x)(v)\|_i \rightarrow 0$$

Aus der Definition von Halbnormen durch lineare Funktionale und dem Satz von Hahn-Banach folgt

$$p_j \left(\int_a^b |y(t)| dt \right) \leq \int_a^b p_j(y(t)) dt$$

Für jede C^1 -Abbildung $y: [a,b] \rightarrow X$ (Übung).

Sei nun $j \in J$ fix. Da df stetig ist ist $p_j \circ df$ stetig und es ex. eine Nullung. $U_1 \subseteq X$ mit $x+U_1 \subseteq U$ und $p_j(df(x+t \cdot v)(v)) < \varepsilon$ für $t \in [0,1]$ und $v \in U_1$ (Kompaktheitsargument?).

$$\Rightarrow p_j(f(x+v) - f(x)) \leq \int_0^1 p_j(df(x+t \cdot v)(v)) dt \leq \varepsilon,$$

wobei die letzte Abschätzung aus df für gewöhnliche stetige Fkt. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folgt. Also ist $p_j \circ f$ stetig und da j beliebig war ist somit f stetig.

d) Dies folgt wie in a) unter Betrachtung der Abb.

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto f(x + t_1 \cdot v_1 + \dots + t_n \cdot v_n)$$

für $v_1, \dots, v_n$ aus einer entsprechenden Nullumgebung in X^n .

Als nächstes wollen wir die Kettenregel beweisen.

Dazu benötigen wir zunächst:

Satz 1.8: Seien X, Y lokalconvex, $U \subseteq X$, $f: U \rightarrow Y$.
Dann ist

$$U^{[1]} := \{ (x, v, t) \in U \times X \times \mathbb{R} : x + t \cdot v \in U \}$$

oder "verlängert" um "Zunächst"

$f^{[1]}: U \rightarrow Y$ ex., so dass $f^{[1]}(x, v, t) = \frac{1}{t} \cdot (f(x+t \cdot v) - f(x))$ für $t \neq 0$ gilt. In diesem Fall ist $df(x, v) = f^{[1]}(x, v, 0)$.

Beweis:

" $\Leftarrow$ " Dass $U^{[1]}$ offen ist folgt aus $U^{[1]} = g^{-1}(U)$ für $g(x, v, t) = x + t \cdot v$.
 Falls $f^{[1]}$ ex. ist $df(x, v) = f^{[1]}(x, v, 0)$ für $x \in U, v \in X$ und somit

" $\Rightarrow$ " Sei $f \in C^1$. Für $x \in U$ ex. dann eine offene konvexe Umgebung $W_x \subseteq X$ mit $W_x = -W_x$ und $x + \mathbb{R} \cdot W_x \subseteq U$, da U offen ist, für $y \in x + W_x, t \cdot v \in W_x$ dann $y + [0, 1] \cdot t \cdot v \in U$ und somit

Bild $\frac{1}{t} \cdot (f(y+t \cdot v) - f(y)) = \int_0^1 df(y+s \cdot v)(v) ds$

(Satz 1.7 b)). Da $p\left(\int_a^b \gamma(t) dt\right) = \int_a^b p(\gamma(t)) dt = \sup_{t \in [a, b]} \{p(\gamma(t))\} \cdot |b-a|$

definiert die rechte Seite eine stetige Funktion auf $x + W_x, W_x, [-1, 1]$

Also ist

$$f^{[1]}(x, v, t) := \begin{cases} \frac{1}{t} \cdot (f(x+t \cdot v) - f(x)) & \text{falls } t \neq 0 \\ \int_0^1 df(x+t \cdot s \cdot v) ds & \text{falls } x + [0, 1] \cdot t \cdot v \subseteq U \end{cases}$$

eine stetige Funktion definiert, die offensichtlich die Bed. erf.

Satz 1.9: (Kettenregel): Seien X, Y, Z lokalconvex, $U \subseteq X, V \subseteq Y$ offen $f: U \rightarrow V$ und $g: V \rightarrow Z \in C^1$. Dann ist auch $g \circ f: U \rightarrow Z \in C^1$ und es gilt

$$d(g \circ f)(x) = d(g)(f(x)) \circ df(x).$$

Bew.: Mit der Charakterisierung aus dem vorigen Satz folgt dies ganz leicht. Für $(x, v, t) \in U^{[n]}$ ist

$$\frac{1}{t} \cdot ((g \circ f)(x + t \cdot v) - (g \circ f)(x)) =$$

$$\frac{1}{t} \cdot (g(f(x) + t \cdot f^{[1]}(x, v, t)) - g(f(x))) =$$

$$g^{[1]}(f(x), f^{[1]}(x, v, t), t)$$

Da die rechte Seite eine stetige Funktion auf $U^{[1]}$ ist, folgt die erste Aussage aus vorigem Satz. Für $t=0$ folgt damit dann auch

$$d(g \circ f)(x)(v) = (g \circ f)^{[1]}(x, v, 0) = g^{[1]}(f(x), f^{[1]}(x, v, 0), 0)$$

$$= dg(f(x))(df(x)(v)). \quad \blacksquare$$

Zum Schluss noch zwei technische Sätze.

Satz 1.10 (Taylor-Formel): Sei lokal konvex $f: U \subseteq X \rightarrow Y$ C^1 . Falls $x + [0, 1] \cdot v \subseteq U$, so gilt

$$f(x+v) = f(x) + df(x)(v) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} d^{n-1} f(x)(v, \dots, v)$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} d^n f(x)(v, \dots, v) dt$$

Bew.: Für $x \in X$ setze $F: [0, 1] \rightarrow Y$, $t \mapsto f(x+t \cdot v)$. Dann folgt die Formel direkt durch $F^{(n)}(t) = d^n f(x+t \cdot v)(v, \dots, v)$ die gewöhnliche Taylorformel und die definierende

$$F^{(n-1)}(1) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} d^n f(x+t \cdot v)(v, \dots, v) dt$$

Satz 1.11: X_1, X_2, Y lokal konvex, $X := X_1 \times X_2$, $U \subseteq X$
 $f: U \rightarrow Y$ stetig ^(lokal) dann existieren die part. Abl.

$$d_1 f(x, y)(v) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x + h \cdot v, y) - f(x, y))$$

$$d_2 f(x, y)(w) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x, y + h \cdot w) - f(x, y))$$

und def. stetige Abb. gdw f C^1 -Abb. ist. In diesem Fall gilt

$$df(x, y)(v, w) = d_1 f(x, y)(v) + d_2 f(x, y)(w).$$

Beweis: " $\Leftarrow$ " Falls f C^1 -Abb. ist, so sind die part. Abl.
 durch Einschränkung des Differenzials gegeben und somit

stetig.

" $\Rightarrow$ " Falls $d_1 f$ und $d_2 f$ existieren und stetige Abb. definieren
 sind sie insbesondere stetige lin. Abb im letzten Argument.

Für $(x, y) + [0, 1] \cdot (v, w) \subseteq U$ haben wir dann

$$\begin{aligned} f(x + h \cdot v, y + h \cdot w) - f(x, y) &= \\ &= f(x + h \cdot v, y + h \cdot w) - f(x + h \cdot v, y) + f(x + h \cdot v, y) - f(x, y) \\ &= \int_0^1 d_2 f(x + h \cdot v, y + t \cdot h \cdot w)(h \cdot w) dt \\ &\quad + \int_0^1 d_1 f(x + t \cdot h \cdot v, y)(h \cdot v) dt \\ &= h \left(\int_0^1 \text{---} (w) dt + \int_0^1 \text{---} (v) dt \right) \end{aligned}$$

Da Integrale stetige Funktionen definieren (Übung)
 folgt die Behauptung aus Satz 1.8. ▀

$$= h \left(\int_0^1 \text{---} (w) dt + \int_0^1 \text{---} (v) dt \right)$$